JOURNAL OF ALGEBRA 139, 273–310 (1991)

Interpolation à N Variables

ALAN EASTWOOD

Département de Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, F-06034 Nice Cedex, France

Communicated by J. Tits

Received October 31, 1987

0. INTRODUCTION

Ce travail a pour but de montrer un théorème d'interpolation pour les polynômes à N variables ($N \geqslant 3$). Précisément étant donnés l points $A_1, ..., A_l$ de k^N, l vecteurs non nuls $V_1, ..., V_l$ de k^N et l entiers $n_1, ..., n_l$ strictements positifs on étudie l'existence d'un polynôme P de $k[X_1, ..., X_N]$, de degré inférieur ou égal à d, qui, pour chaque valeur de i prenne, ainsi que ses dérivées successives d'ordre strictement inférieur à n_i, par rapport à V_i, des valeurs prescrites en A_i.

Cet article résout ce problème d'existence pour des valeurs quelconques des n_i, pour des points généraux A_i et des directions générales V_i. Par exemple on montre l'existence de P dès que

$$\binom{d+N}{N} \geqslant \sum_{i=1}^{i=l} n_i \qquad \text{et} \quad n_i \leqslant d+1 \text{ pour tout } i.$$

Plus précisément, soient k un corps commutatif de caractéristique nulle et $F_{A,V}$ l'application k-linéaire

$$F_{A,V}\colon k_d[x_1, ..., x_N] \to k^L$$
$$P \mapsto \left(\left(\frac{\delta^j P}{\delta V_i j}(A_i)\right)_{j=0,...,n_i-1}\right)_{i=1,...,l},$$

où $k_d[x_1, ..., x_N]$ désigne le k-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d, entier donné, $(n_i)_{i=1,...,l}$ une suite donnée d'entiers de $\mathbb{N}^*$, L l'entier $L := \sum_{i=1}^{i=l} n_i$, $A = (A_1, ..., A_l)$ une suite de l points distincts de k^N, $V = (V_1, ..., V_l)$ une suite de l vecteurs non nuls de k^N, et enfin $(\delta^j P/\delta V_i j)(A_i)$ la dérivée partielle d'ordre j de P dans la direction de V_i calculée au point A_i.

0021-8693/91 $3.00

Dans cet article on calcule le rang de $F_{A,V}$ quand A et V sont en position générale. Plus précisément on démontre le

THÉORÈME 0. *Si $N \geqslant 3$ et si $F_{A,V}$ est le morphisme*

$$F_{A,V}: k_d[x_1, ..., x_N] \to k^L$$

$$P \mapsto \left(\left(\frac{\delta^j P}{\delta V_i j}(A_i)\right)_{j=0,...,n_i-1}\right)_{i=1,...,l},$$

alors

$$\max(\text{rang } F_{A,V}) = \min\left(\binom{d+N}{N}, \sum_{i=1}^{i=l} \min(d+1, n_i)\right),$$

où $\binom{d+N}{N}$ *désigne le coefficient binomial classique.*

Remarques. (1) Le problème analogue si $N=1$ est élémentaire tandis que le cas $N=2$ a été traité par A. Eastwood dans [E].

(2) On montre en outre que le maximum du rang de $F_{A,V}$ n'est pas, contrairement au cas où N vaut deux, nécessairement obtenu pour des vecteurs V_i tous parallèles à un même hyperplan.

On démontre ce théorème après s'être ramené au cas où le corps de base est algébriquement clos en utilisant la méthode d'Horace décrite par A. Hirschowitz dans [AH]. Dans le cas particulier où, pour tout i de $[\![1, l]\!]$, n_i vaut $d+1$, le Théorème 0 peut s'interprêter comme un résultat sur les droites en position générale dans l'espace projectif. Ce cas particulier avait été traité auparavant par Hartshorne et Hirschowitz (cf. [HH]). Du reste la démonstration proposée dans cet article reprend des constructions décrites par ces derniers. La démonstration repose, par ailleurs, sur la collision de biais, technique de spécialisation introduite dans [E] pour traiter le problème en dimension deux.

Enfin le calcul des dimensions des groupes de cohomologie, des idéaux tordus par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}$, des sous-schémas localement rectilignes généraux de dimension zéro de $\mathbb{P}_k^N$ résulte facilement de ce théorème.

Je tiens à remercier A. Hirschowitz pour l'aide qu'il m'apportée.

Contents.

1. Eléments de Contact et Multijetées

I.1. *Elément de Contact.* Notons $G_k^1(N)$ la grassmanienne des droites de $\mathbb{P}_k^N$. Nous désignons par C le schéma $\mathbb{P}_k \times G_k^1(N)$ et par Γ le sous-schéma de C associé à la variété des couples $D = (M, L)$ où M est un point de $\mathbb{P}_k^N$ et L une droite de $\mathbb{P}_k^N$ avec M sur L. Le schéma Γ est souvent appelé le *schéma d'incidence.* Un point de Γ est appelé un *élément de contact* dans $\mathbb{P}_k^N$.

I.2. *Notion de p-Jetée.* Pour tout entier p supérieur ou égal à deux, $D = (M, L)$ étant un point (non nécessairement fermé) de Γ de corps de définition K, nous définissons D^p comme étant le sous-schéma de $\mathbb{P}_k^N$ égal au voisinage infinitésimal de colongueur p de M dans L. Nous appellerons D^p une *jetée* ou plus précisement une *p-jetée.* Nous dirons aussi que L est l'axe de la jetée et M son support.
Si $\mathrm{Hilb}^p\, \mathbb{P}_k^N$ désigne le schéma des sous-schémas fermés de colongueur p de $\mathbb{P}_k^N$, le morphisme naturel

$$j_p : \Gamma \to \mathrm{Hilb}^p\, \mathbb{P}^N$$
$$D \mapsto D^p$$

est un plongement.

I.3. Convention. Pour uniformiser les notations, dans la suite, un point de $\mathbb{P}^N$ sera parfois appelé une 1-jetée et noté D^1 où $D = (M, L)$, L étant une droite passant par M. Toute droite passant par M pourra être considérée comme un axe de D^1.

I.4. *Notion de Multijetée.*

I.4.1. Définition. Un sous-schéma X de $\mathbb{P}_k^N$ est dit *localement rectiligne* si pour tout point M du support de X il existe un voisinage ouvert V de M tel que $V \cap X$ soit inclus dans une droite de $\mathbb{P}_k^N$.

I.4.2. Définition. Nous appellerons *multijetée* tous sous-schéma de $\mathbb{P}_k^N$ localement rectiligne, de dimension zéro.

I.4.3. *Notation.* Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites décroissantes d'entiers naturels à support finit et $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}$ à support fini. L'application

$$F : \mathscr{S} \to \mathscr{A}$$
$$(n_i)_{i \in N^*} \mapsto \varepsilon$$

où ε est l'application définie, n étant l'application qui définit la suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, par

$$\forall j\in\mathbb{N}^*, \qquad \varepsilon(j)=\operatorname{Card} n^{-1}(\{j\}) \qquad (\varepsilon(j) \text{ sera noté } \varepsilon_j \text{ dans la suite})$$

est bijective. Dans la suite nous utiliserons la suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que son image ε, que nous noterons aussi $\hat{n}$ et que nous appellerons l'application associée. D'autre part nous écrirons aussi $(n_i)_{i=1,\dots,l}$ au lieu de $(n_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ si $(i>l\Rightarrow n_i=0)$.

Si $D=(D_1, \dots, D_l)$ est dans Γ^l, à toute suite décroissante $(n_i)_{i=1,\dots,l}$ de $\mathscr{S}$ nous associons la multijetée $X:=\bigcup_{i=1}^{i=l} D_i^{n_i}$, qui sera notée dans la suite $D^{\hat{n}}$ (ou D^ε), ε étant l'application associée à la suite n, avec la convention que D_i^0 est vide. Inversement il est clair que toute multijetée est du type précédent.

Les multijetées de multi-indice donné constituent un sous-schéma localement fermé et irréductible du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}_k^N$. Le schéma irréductible des multijetées de multi-indice fixé n, admet un point générique unique que nous appellerons dans la suite la multijetée générale $D^{\hat{n}}$ associée au multi-indice n. Il résulte de la définition d'une multijetée que $D^{\hat{n}}$ est générale dans le sous-schéma des multijetées de multi-indice n fixé si et seulement si pour tout i de $[\![1, l]\!]$, D_i est générique dans Γ. Enfin la *colongueur* de $D^{\hat{n}}=D^\varepsilon$ est l'entier $\sum_{i=1}^{i=l} n_i=\sum_{j\in\mathbb{N}^*} j\varepsilon_j$.

II. Proposition Fondamentale et Corollaires

II.0. Convention. Dans toute la suite on convient que $[a, b]=\varnothing$ si $b<a$.

II.1. *Traduction du Problème Initial en Géométrie Projective.* La suite décroissante $n=(n_i)_{i=1,\dots,l}$ étant donnée ainsi que l'entier naturel d, soit $X:=D^{\hat{n}}$ la multijetée générale associée à $\hat{n}$. Notons $\varphi_{D^{\hat{n}}}(d)$ le morphisme naturel

$$\varphi_{D^{\hat{n}}}(d)\colon H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d))\to H^0(\mathcal{O}_X(d)).$$

L'ensemble des points de rang maximum est un ouvert du schéma de Hilbert (cf. [AH], p. 344). Un argument de densité dans le schéma des multijetées de multi-indice fixé $\hat{n}$ nous montre que l'entier $\boldsymbol{\rho}_k$ défini par

$$\boldsymbol{\rho}_k=\operatorname{Max}_{A, V} \qquad (\operatorname{rang} F_{A, V})$$

est égal au rang du morphisme $\boldsymbol{\varphi}_{D^{\hat{n}}}(d)$. C'est ce dernier que nous allons calculer dans la suite de cet article.

II.2. *Réduction au Cas Où le Corps de Base Est Algébriquement Clos.*

II.2.1. Dans ce paragraphe nous supposons que k est un corps commutatif de caractéristique nulle (non nécessairement algébriquement clos). Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. La démonstration faite pour le cas de dimension 2 par Eastwood (cf. [E, Sect. I.4.2]) s'applique ici et nous permet d'énoncer le

II.2.2. LEMME. *Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k*

$$\mathbf{\rho}_k = \mathbf{\rho}_{\bar{k}}.$$

Ce lemme va nous permettre de supposer désormais, pour le calcul du rang de $\varphi_{D^{\hat{n}}}(d)$, que le corps de base est algébriquement clos.

II.3. *Caractérisation des Multijetées Générales Rangées.* Comme dans [AH, p. 345], on dira qu'un sous-schéma Y de $\mathbb{P}^n$ est *rangé au niveau d* si le morphisme naturel

$$\varphi_Y(d)\colon H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(d))$$

est bijectif.

Enonçons la

II.3.1. PROPOSITION FONDAMENTALE. *Soit ε une application de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}$ à support fini, d est un entier naturel, N un entier de $[\![3, +\infty[\![$ et D^ε la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$ associée à ε; alors*

$$D^\varepsilon \textit{ rangée} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \geqslant d+2, & \varepsilon_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{j=d+1} j\varepsilon_j = \binom{d+N}{N}. \end{cases}$$

II.3.2. *Nécessité des Conditions.* La nécessité des conditions est facile. En effet si D^ε est rangé au niveau d, $\varphi_{D^\varepsilon}(d)$ est surjective et par suite

$$\forall i \in [\![d+2, +\infty[\![, \qquad \varepsilon_i = 0.$$

Enfin $\varphi_{D^\varepsilon}(d)$ étant un isomorphisme entre $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d))$ et $H^0(\mathcal{O}_{D^\varepsilon}(d))$, la comparaison des dimensions donne:

$$\sum_{j=1}^{j=d+1} j\varepsilon_j = \binom{d+N}{N}.$$

II.3.3. *Suffisance des Conditions.*

II.3.3.1. *Remarque.* La relation "être spécialisation de" est un ordre partiel sur l'ensemble des multijetées générales de $\mathbb{P}_k^N$. Nous pouvons nous contenter de montrer la suffisance des conditions pour une multijetée générale maximale (pour cet ordre). On peut donc supposer, quitte à réaliser des collisions de front que

$$n_{l-1}+n_l>d+1.$$

Nous supposerons vérifiée dans la suite la condition plus faible

$$\sum_{j=1}^{j=[(d+1)/2]} \varepsilon_j \leqslant 1.$$

II.3.3.2. La preuve de la suffisance des conditions fera l'objet des paragraphes V (pour la dimension 3) et VI (pour la dimension $N \geqslant 4$). Les constructions décrites en V et VI sont préparées dans les paragraphes III et IV, qui contient des lemmes sur la quadrique.

II.4. *Conséquences de la Proposition Fondamentale.*

II.4.1. *Caractérisation des Multijetées Générales de Rang Maximum de* $\mathbb{P}_k^N (N \geqslant 3)$. Soit $(n_i)_{i=1,\dots,l}$ une suite décroissante d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et ε l'application associée (cf. Section I.4.3). Soit $Y := D^\varepsilon$ la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$ associée à ε.

Rappel. On dit que Y est de rang maximum si pour tout entier de S de $\mathbb{N}$, le morphisme naturel,

$$\varphi_Y(S)\colon H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(S)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(S))$$

est de rang maximum.

Nous allons caractériser les multijetées générales de $\mathbb{P}_k^N$ de rang maximum par le

II.4.1.1. Corollaire. *Soit $N \geqslant 3$ et D^ε la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$, soit d l'unique entier tel que*

$$\binom{d+N}{N} \leqslant \sum_{j \in \mathbb{N}^*} j\varepsilon_j < \binom{d+N+1}{N}$$

et soit e l'entier (que nous appellerons l'excès) défini par

$$e = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} j\varepsilon_j - \binom{d+N}{N}.$$

Alors

$$D^\varepsilon \text{ est de rang maximum} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![d+3, +\infty [\![, & \varepsilon_i = 0 \\ \varepsilon_{d+2} \leqslant e. \end{cases}$$

II.4.1.2. *Nécessité des Conditions.* Posons $Y := D^\varepsilon$. Pour des raisons évidentes de dimensions $\varphi_Y(d)$ est injective et $\varphi_Y(d+1)$ surjective; la surjectivité de $\varphi_Y(d+1)$ impose

$$\forall i \in [\![d+3, +\infty[\![, \qquad \varepsilon_i = 0.$$

D'autre part soit η l'application définie par

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N} \\ i &\mapsto \varepsilon_i \qquad\qquad \text{si } i \in \mathbb{N}^* \setminus \{d+1, d+2\} \\ d+1 &\mapsto \varepsilon_{d+1} + \varepsilon_{d+2} \\ d+2 &\mapsto 0, \end{aligned}$$

et soit D^η la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$ associée à η. Comme D^η est incluse dans D^ε et que $\varphi_{D^\varepsilon}(d)$ est injective, $\varphi_{D^\eta}(d)$ l'est aussi.

En passant aux dimensions pour le morphisme

$$\varphi_{D^\eta}\colon H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d)) \to H^0(\mathcal{O}_{D^\eta}(d)),$$

nous obtenons

$$\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d)) = \binom{d+N}{N} \leqslant \sum_{i \in N^*} i\eta_i = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} i\varepsilon_i - \varepsilon_{d+2},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{d+2} \leqslant e.$$

II.4.1.3. *Suffisance des Conditions.* Nous savons (cf. [AH]) qu'il nous suffit de montrer l'existence de deux multijetées générales de $\mathbb{P}_k^N$, $D^{\hat{\Pi}}$ et $D^{\hat{p}}$ associées aux suites décroissantes Π et p, telles que

$$D^{\hat{\Pi}} \subset D^{\hat{n}} = D^\varepsilon \subset D^{\hat{p}},$$

que $D^{\hat{\Pi}}$ est rangée au niveau d et que $D^{\hat{p}}$ est rangée au niveau $d+1$. Soit L l'entier défini par

$$L := l + \binom{d+N+1}{N} - \sum_{j \in \mathbb{N}^*} j\varepsilon_j$$

et soit d'autre part $p = (p_i)_{i=1,\dots,L}$ la suite décroissante définie par

$$\begin{cases} p_j = n_j & \text{si } j \in [\![1, l]\!], \\ p_j = 1 & \text{si } j \in [\![l+1, L]\!]. \end{cases}$$

L'hypothèse $\varepsilon_{d+2} \leqslant e$ assure alors l'existence de $m = (m_i)_{i=1,\ldots,l}$, suite d'entiers de $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, \varepsilon_{d+2}]\!] & m_i \leqslant n_i - 1 \\ \forall i \in [\![e_{d+2}, l]\!] & m_i \leqslant n_i \\ \sum_{i=1}^{i=l} im_i = \binom{d+N}{N}. \end{cases}$$

Soit Π la suite décroissante obtenue en réordonnant la suite m. On a alors, par construction, $D^{\hat{\Pi}} \subset D^{\hat{n}} \subset D^{\hat{p}}$. Enfin $\mathbf{D}^{\hat{\Pi}}$ et $D^{\hat{n}}$ sont rangées au niveau d et $d+1$ respectivement, d'après la Proposition II.3.1 et puisque l'hypothèse $\varepsilon_{d+2} \leqslant e$ assure que $\Pi_1 \leqslant d+1$.

II.4.2. *Résolution du Problème Initial.* Soit $Y := D^{\varepsilon} = D^{\hat{n}}$ la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$ associée à la suite décroissante $n = (n_i)_{i=1,\ldots,l}$ et à l'application ε (cf. Section I.4.3). Soit d un entier natural quelconque. Remarquons qu'en appliquant à la suite exacte longue de cohomologie les résultats classiques sur la cohomologie des espaces $\mathbb{P}^N$ (cf. [H, p. 225]) et des schémas finis (cf. [H, p. 208]), il nous suffit de préciser la dimension du noyau du morphisme

$$\varphi_Y(d)\colon H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(d))$$

pour connaître toutes les dimensions cohomologiques des idéaux tordus (par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d)$) du sous-schéma Y.

Montrons donc le

II.4.2.1. Corollaire. *Soit $N \geqslant 3$, d un entier de $\mathbb{N}$ et $Y := D^{\hat{n}}$ la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$ associée à la suite décroissante $n = (n_i)_{i=1,\ldots,l}$. Posons*

$$\forall i \in [\![1, l]\!], \qquad n_i' = \min(d+1, n_i).$$

Alors

$$\dim H^0(I_Y(d)) = \max\left(\binom{N+d}{N} - \sum_{i=1}^{i=l} n_i', 0\right).$$

Preuve du Corollaire. Soit $Y' := D^{\hat{n}'}$, la multijetée générale associée à la suite décroissante

$$n' = (n_i')_{i=1,\ldots,l}.$$

Il est clair que

$$\ker \varphi_Y(d) = \ker \varphi_{Y'}(d).$$

Notons par E l'entier défini par

$$E := \binom{d+N}{N} - \sum_{i=1}^{i=l} n'_i$$

et distinguons deux cas.

(a) $E > 0$.

Soit alors $n'' = (n''_i)_{i=1,\ldots,l+E}$ la suite décroissante définie par

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, l]\!] & n''_i = n'_i \\ \forall i \in [\![l+1, l+E]\!] & n''_i = 1, \end{cases}$$

et soit $Y'' := D^{\bar{n}''}$ la multijetée générale de $\mathbb{P}^N_k$ associée à la suite décroissante n''. D'après la Proposition II.3.1, Y'' est rangée au niveau d et de la surjectivité du morphisme naturel de $H^0(\mathcal{O}_{Y''}(d))$ vers $H^0(\mathcal{O}_{Y'}(d))$ nous déduisons que

$$\dim \ker \varphi_{Y'}(d) = \dim \ker \varphi_Y(d) = \binom{d+N}{N} - \sum_{i=1}^{i=l} n'_i = E.$$

(b) $E \leqslant 0$.

Alors d'après le Corollaire II.4.1.1, Y' est de rang maximum et, puisque $\sum_{i=1}^{i=l} n'_i \geqslant \binom{d+N}{N}$, $\varphi_{Y'}(d)$ est injective et par suite

$$\dim \ker \varphi_{Y'}(d) = \dim \ker \varphi_Y(d) = 0,$$

ce qui achève la démonstration du Corollaire II.4.2.1. ∎

II.5. *Retour au Problème Posé dans l'Introduction.* Le Corollaire II.4.2.1 montre que

$$\operatorname{rang} \varphi_Y(d) = \min\left(\binom{d+N}{N}, \sum_{i=1}^{i=l} n'_i\right).$$

Le Théorème 0 de l'introduction résulte alors de cette égalité et du Lemme II.2.2.

Remarque. En dimension deux on a montré (cf. [E]) que le maximum du rang de $F_{A,V}$ (cf. Introduction) était atteint pour des jetées toutes parallèles à un hyperplan donné (c'est-à-dire à une droite en dimension deux). Ce résultat ne se généralise pas en dimension supérieure. En effet, si $N = 3$, $d = 3$, $\varepsilon_4 = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ le schéma réunion de 5 droites génériques coupant une même droite du plan à l'infini n'est pas rangé (car il est clair que $\varphi_Y(3)$ n'est pas bijective).

III. Jetées d'Ordre Supérieur: Trace et Résiduel

III.1. *Jetée d'Ordre Supérieur.* Désignons par C' le schéma $\mathbb{P}_k^N \times G_k^1(N) \times G_k^2(N)$ c'est-à-dire le schéma des drapeaux de type (0, 1, 2) de $\mathbb{P}_k^N$. Soit Γ' le sous-schéma associé à la variété des triplets (M, L, P) tels que M est un point de $\mathbb{P}_k^N$, L une droite de $\mathbb{P}_k^N$, P un plan de $\mathbb{P}_k^N$ tels que M soit sur L et L soit dans P.

III.1.1. Définitions. Soit $D = (M, L, P)$ un point (non necessairement fermé) de Γ', soit r un entier de $\mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{i=1,\dots,r}$ une suite strictement décroissante d'entiers de $\mathbb{N}^*$ que nous désignerons par p.

Nous définissons alors D^p comme étant le sous-schéma de $\mathbb{P}_K^N$, où K est le corps de définition de D, dont l'idéal est défini par

$$I_{D^p} = I_P + \sum_{j=1}^{j=r+1} I_L^{j-1} I_M^{pj}$$

où d'une part nous avons posé par convention $p_{r+1} = 0$ et d'autre part I_M, I_L, et I_P désignent respectivement les idéaux de M, de L et de P. Nous appellerons le sous-schéma D^p une *jetée d'ordre r* ou plus précisément une *p-jetée.*

Le point M est le *support* de D^p, nous appelerons L son *axe* et P son *plan.* La *colongueur* de D_p est l'entier défini par

$$|p| := \sum_{i=1}^{i=r} p_i.$$

Dans un système de coordonnées affines centré en M, dont l'axe des x_1 est porté par L, et dont l'axe x_2 est dans le plan P, l'idéal I_{D^p} est engendré par les monômes

$$x_1^{p_1}, x_1^{p_2}x_2, \dots, x_1^{p_r}x_2^{r-1}, x_2^r, x_3, \dots, x_N.$$

Enfin D^p est générale si et seulement si D est générique dans Γ'.

III.1.2. *Remarque.* Une jetée simple peut être considérée comme une jetée d'ordre un ayant comme plan un plan arbitraire contenant son axe.

III.1.3. *Terminologie.* Une (2, 1)-jetée est parfois appelée "point triple", comme dans [HH]. Exemple: le sous-schéma défini par l'idéal (X^2, XY, Y^2, Z) en dimension 3.

III.2. *Trace et Résiduel des Jetées d'Ordre Supérieur.*

III.2.1. *Jetée Simple Extravertie sur une Hypersurface Régulière S.*

DÉFINITION. Si $D=(M, L)$ est un élément de contact et p un entier de $\mathbb{N}^*$ nous dirons que D^p est *extravertie sur* S si M et sur S et si D est transverse à S.

Le schéma trace (cf. [AH, p. 352]) de D^p sur S est le point M tandis que le schéma résiduel (cf. [AH, p. 353]) est la jetée D^{p-1}.

III.2.2. *Jetée Simple Génériquement Tangente à une Quadrique Lisse Q de $\mathbb{P}_k^3$.*

DÉFINITION. Si $D=(M, L)$ est une élément de contact et p un entier de $[\![2, +\infty[\![$, nous dirons que D^p est *génériquement tangente* à Q si M est sur Q et L est tangente à Q.

La trace de D^p sur Q est la 2-jetee D^2 tandis que le résiduel est la $(p-2)$-jetée D^{p-2}.

III.2.3. *Jetée Simple Introvertie dans un Hyperplan* **H** *de $\mathbb{P}_k^n$ ou dans un Système $\mathscr{D}$ de Génératrices d'une Quadrique Lisse de $\mathbb{P}_k^3$.*

DÉFINITION. Si $D=(M, L)$ est un élément de contact et p un entier de $\mathbb{N}^*$, nous dirons que D^p est *introvertie*

— dans **H** si M est dans **H** et L aussi.

— sur le système $\mathscr{D}$ de génératrices de Q si M est sur Q et L appartient à $\mathscr{D}$.

D^p est alors inclus dans **H** (respectivement dans Q).

III.2.4. *Jetee d'Ordre Quelconque Ambivertie sur un Hyperplan* **H**.

DÉFINITION. Soit D^p une jetée d'ordre r définie par la suite strictement décroissante $p=(p_1, p_2, ..., p_r)$ et par le triplet $D=(M, L, P)$ de Γ' tel que L soit dans **H** et P soit transverse à **H** en M. Nous dirons alors que D^p est *ambivertie dans* **H**.

La trace de D^p est la jetée simple $D_1^{p_1}$ où $D_1=(M, L)$ est dans **H**. Le résiduel est la jetée d'ordre $r-1$ définie par $D^{(p_2, ..., p_r)}$.

III.2.4.1. *Remarques.* (1) *Cas d'une* $(2, 1)$*-Jetée.* Dans le cas d'une $(2, 1)$-jetée ambivertie sur un hyperplan **H** la colongueur du schéma trace sur **H** est minimale. Conformément aux idées de [AH] on pourrait donc la qualifier d'extravertie sur **H**. Cela implique que le support de la jetée est sur **H**.

III.2.4.2. (2) *Cas d'une Jetée Simple.* Dans le cas d'une jetée simple ambivertie sur un hyperplan **H** la colongueur du schéma trace est maximale. Ici encore on pourrait la qualifier d'introvertie dans **H**.

III.2.5. *Jetée d'Ordre Quelconque Ambivertie sur le Système $\mathscr{D}$ d'une Quadrique Lisse Q de $\mathbb{P}^3_k$.*

DÉFINITION. Soit Q une quadrique lisse de $\mathbb{P}^3_k$ et $\mathscr{D}$ un système de génératrices de Q. Soit D^p une jetée d'ordre r définie par la suite strictement décroissante $p=(p_1, ..., p_r)$ et par le triplet $D=(M, L, P)$ de Γ' tel que L soit une droite de $\mathscr{D}$ et que P soit un plan, contenant L, transverse à Q en M. Nous dirons alors que D^p est *ambivertie sur Q* (le système $\mathscr{D}$ étant alors sous-entendu).

La trace de D^p est la jetée simple $D_1^{p_1}$ où $D_1=(M, L)$. Le résiduel de D^p est la jetée d'ordre $r-1$, $D^{(p_2, ..., p_r)}$.

III.2.6. *Remarque sur les $(d+1)$-Jetées.* Le lemme suivant qui résulte facilement de la formule de Taylor nous sera utile.

LEMME. *Soit $Y:=D^{d+1}$ une jetée simple avec $D=(M, L)$ un élément de contact de Γ. Soit P un polynôme représentant un élément de $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_k}(d))$. Alors*

$$P_{/Y}=0 \Leftrightarrow P_{/L}=0.$$

III.2.7. Dans la suite de cet article nous utiliserons à plusieurs reprises le Lemme III.2.6 pour le calcul de sous-espaces du type $\ker \varphi_D \varepsilon(d)$; ce lemme nous conduira à remplacer systématiquement une $(d+1)$-jetée par son axe L ce qui nous rendra possible l'exploitation des résulats de Hartshorne et Hirschowitz (cf. [HH]) sur les droites en position générale dans $\mathbb{P}^N_k$. Désormais D^ε (ou $D^{\hat{n}}$) désignera donc la réunion de ε_{d+1} droites avec toutes les jetées de longueur inférieure ou égale à d. De même quand on exploitera (cf. Section V) une quadrique Q, on spécialisera systématiquement les d-jetées sur Q.

IV. QUELQUES LEMMES SUR LA QUADRIQUE LISSE Q DE $\mathbb{P}^3_k$

IV.1. *Rappels sur les Quadriques de $\mathbb{P}^3_k$.* Dans la suite nous désignerons par Q une quadrique lisse munie d'un isomorphisme avec $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ qui induit un isomorphisme entre $\operatorname{Pic} Q$ et $\mathbb{Z}^2$. Soient α et β deux entiers de $\mathbb{Z}$

et Y un sous-schéma de Q de type (α, β); nous désignerons par $\mathcal{O}_Q(\alpha, \beta)$ le faisceau inversible $\mathcal{L}(Y)$ qui est isomorphe à

$$p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\alpha) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\beta).$$

En tensorisant la suite exacte

$$0 \to I_Y \to \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

associée au sous-schéma Y on obtient la suite exacte

$$0 \to I_Y(\alpha, \beta) \to \mathcal{O}_Q(\alpha, \beta) \to \mathcal{O}_Y(\alpha, \beta) \to 0.$$

IV.2. DÉFINITION. Soient toujours $\mathcal{D}$ l'un des systèmes de génératrices de Q et $n = (n_i)_{i=1,\dots,l}$ une suite décroissante de $\mathbb{N}^*$ et ε l'application associée (cf. Section I.4.3); la multijetée D^ε où $D = (D_1, \dots, D_l)$ sera dite une *$\mathcal{D}$-multijetée* si pour tout i de $[\![1, l]\!]$, $D_i^{n_i}$ est (schématiquement) incluse dans une droite de $\mathcal{D}$.

La $\mathcal{D}$-multijetée D^ε est *générale* si et seulement si D_i est générique pour tout i de $[\![1, l]\!]$.

Montrons alors le

IV.3. LEMME. *Soit α et β deux entiers de $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{D}$ un système de génératrices de la quadrique lisse Q de $\mathbb{P}_k^3$. Si D^ε est la $\mathcal{D}$-multijetée générale associée à ε et Δ^s une jetée simple introvertie sur une droite du système $\mathcal{D}$ tels que*

$$\begin{cases} s + \sum_{j=1}^{j=\alpha+1} j\varepsilon_j \geqslant (\alpha+1)(\beta+1) \\ s \leqslant \alpha + 1 \end{cases} \tag{$*$}$$

Alors $H^0(I_{D^\varepsilon \cup \Delta^s}(\alpha, \beta)) = 0$.

Démonstration. Remarquons qu'il nous suffit de montrer ce lemme quand il y a égalité en $(*)$.

Démontrons alors ce lemme par récurrence sur β, α étant quelconque dans $\mathbb{N}$. Pour β nul il nous suffit de spécialiser toutes les jetées sur l'axe de Δ^S. Supposons donc le lemme vrai pour β dans $[\![0, n-1]\!]$. Quitte à réaliser au plus une collision de biais (cf. [E, Sect. II.4]) dans un plan transverse à Q et contenant l'axe de Δ nous pouvons ajuster (cf. [AH, p. 361]) sur l'axe A de Δ^S. L'exploitation de A par le lemme d'Horace (cf. [AH, p. 354]) nous ramène à l'hypothèse de récurrence. ∎

IV.4. LEMME. *Soient d un entier et $\mathcal{D}$ est un système de génératrices de la quadrique lisse Q de $\mathbb{P}_k^3$. Soient $\mathcal{O}$ une application de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}$ à support* *fini, $D^{\mathcal{O}}$ la $\mathcal{D}$-multijetée générale associée et T la réunion de t exemplaires de $(2, 1)$-jetées générales sur Q telles que*

$$3t + \sum_{j=1}^{j=d+1} j\mathcal{O}_j = (d+1)^2,$$

$$\mathcal{O}_1 \geqslant 2,$$

$$\mathcal{O}_1 + 2\mathcal{O}_2 \geqslant \frac{3d+5}{2} - 2t,$$

$$t \leqslant \frac{2d}{3}.$$

Posant $Y := D^{\mathcal{O}} \cup T$, on a

$$H^0(I_Y(d)) = 0.$$

Dans la suite $[x]$ désignera la partie entière du nombre rationnel x.

Démonstration. Si $t = 0$ le Lemme IV.4 se ramène au Lemme IV.3 déjà prouvé. Distinguons alors deux cas:

— si $1 \leqslant t \leqslant (d+1)/2$, on spécialise sur une droite D de $\mathcal{D}$ les $t(2, -1)$-jetées, puis on spécialise p points simples et m points doubles sur D avec $2m + p = d + 1 - 2t$.

Après exploitation de D on est ramené au Lemme IV.3 avec $\alpha = d$ et $\beta = d - 1$.

— si $(2d/3) \geqslant t > (d+1)/2$ on spécialise $[(d+1)/2]$ $(2, 1)$-jetées sur D puis, si d est pair, on ajuste sur D avec un point simple. Après exploitation de D on spécialise sur D les $t - [(d+1)/2]$ $(2, 1)$-jetées restantes et l'on ajuste sur D en spécialisant p points simples et m points doubles avec $p + 2m = d + 1 + [(d+1)/2] - 2t$.

Après exploitation de D on est ramené au Lemme IV.3 avec $\alpha = d$ et $\beta = d - 2$. ∎

V. Suffisance des Conditions de la Section II.3.1 dans le Cas $N = 3$

V.0. *Rappels sur la Méthode d'Horace.* Un sous-schéma fini X de $\mathbb{P}_k^N$ et un entier d étant donnés, la méthode d'Horace (cf. [AH]) est utilisée pour montrer que $H^0(J_X(d)) = 0$ où J_X désigne le faisceau d'idéaux de X dans $\mathbb{P}^N$. Bien sûr, vu la semi-continuité de la dimension du H^0, il suffit de montrer que $H^0(J_Y(d)) = 0$ en prenant pour Y une spécialisation de X.

La méthode d'Horace consiste, à l'instar du héros antique, à fractionner la difficulté en deux parties en utilisant (on dit en "exploitant") une hypersurface auxiliaire Q de degré s (dans le présent article s vaut toujours 1 ou 2). Il suffit alors de prouver les deux conditions suivantes:

(1) $H^0(J_{X \cap Q/Q}(d)) = 0$, où $J_{X \cap Q/Q}$ désigne l'idéal de l'intersection (schématique) $X \cap Q$ dans Q (condition en basse dimension ou "dîme").

(2) Si Z est le schéma résiduel de Q dans X, intuitivement $X - (X \cap Q)$, $H^0(J_Z(d-s)) = 0$ (condition en bas degré ou "dègue").

V.1. *Si* $d = 0$, la suffisance est évidente.

V.2. *Si* $d = 1$, la seule multijetée générale maximale est définie par

$$\varepsilon_2 = 2,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0.$$

La suffisance des conditions résulte alors, par exemple, du fait que deux 2-jetées générales ne sont pas coplanaires.

V.3. *Si* $d = 2$, il y a trois multijetées maximales définies par

(a) $\varepsilon_3 = 3$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$,

(b) $\varepsilon_3 = 2$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_1 = 0$,

(c) $\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2 = 5$, $\varepsilon_1 = 0$.

Dans ces trois cas nous montrons que D^ε est rangé en exploitant une quadrique propre Q, par la méthode d'Horace, après avoir spécialisé certaines jetées sur le système $\mathscr{D}$ de génératrices de Q et en ajustant éventuellement par collision de biais (cf. [E, Sect. II.4]). Le détail des spécialisations n'est pas précisé ici; elles sont très faciles.

Dans l'exploitation de Q la dîme (cf. [AH, p. 353]) est vérifiée d'après le Lemme IV.3.

V.4. *Si* $d = 3$, il y a quatre cas maximaux définis par

(a) $\varepsilon_4 = 5$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$,

(b) $\varepsilon_4 = 3$, $\varepsilon_3 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$,

(c) $\varepsilon_4 = 2$, $\varepsilon_3 = 4$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$,

(d) $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_3 = 6$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$.

Dans les cas (b), (c), et (d) nous montrons facilement que D^ε est rangée en exploitant une quadrique lisse Q. Les spécialisations très faciles ne sont pas reproduites ici. La dîme est vérifiée toujours d'après le Lemme IV.3.

Le cas (a), moyennant la Section III.2.6, résulte du Théorème 1.1 de Hartshorne et Hirschowitz (cf. [HH]).

V.5. *Si* $d \geqslant 4$, comme souvent quand on applique la méthode d'Horace on va démontrer un énoncé plus général. Plus précisement montrons ici la

PROPOSITION V.5.1. *Si* $d \geqslant 4$ *et si* $Y := D^{\varepsilon'} \cup D^{\varepsilon''}$ *où* $D^{\varepsilon'}$ *est la multijetée générale dans* $\mathbb{P}_k^3$ *associée à l'application* ε' *et* $D^{\varepsilon''}$ *la* $\mathscr{D}$*-multijetée générale telles que*

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=d+1} j(\varepsilon_j' + \varepsilon_j'') = \binom{d+3}{3} \\ \varepsilon_j' = 0 \qquad si \quad j > d+1 \\ \varepsilon_{d-1}'' \leqslant 1 \\ \varepsilon_j'' = 0 \qquad si \quad j \geqslant d \\ \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \cdots + \varepsilon_{d-2}'' \leqslant \left[\dfrac{d}{3}\right] + 1. \end{array}\right\}$$

Alors $H^0(I_Y(d)) = 0$.

Démonstration. Nous posons, pour j dans $\mathbb{N}^*$, $\varepsilon_j := \varepsilon_j' + \varepsilon_j''$.

Désignons par H_d l'assertion de la Proposition V.5.1. Montrons que H_d est vraie par récurrence sur d dans $[\![4, +\infty[\![$. Supposons que H_c est vraie si c est dans $[\![4, d-1]\!]$ avec $d \geqslant 6$ et montrons que H_d est vraie. Il nous suffira enfin de vérifier H_4 et H_5.

Distinguons:

V.5.2. 1*er Cas.* $\varepsilon_{d+1} + \varepsilon_d + \varepsilon_{d-1}' \geqslant (d^2 + d + 4)/6$, divisé en deux sous-cas:

(a) $d = 3k$ *ou* $d = 3k + 2$ *avec* k *dans* $[\![2, +\infty[\![$.

Nous allons encore exploiter Q en appliquant le lemme d'Horace: il existe une spécialisation Y' de Y où $Y' = A \cup B$ et

— A est la réunion de $(d^2 + d)/6$ jetées générales dans $\mathbb{P}_k^3$ de longueur supérieure ou égale à $d - 1$ prises parmi les $\varepsilon_{d+1} + \varepsilon_d + \varepsilon_{d-1}'$ disponibles,

— B est la réunion de toutes les autres jetées de Y spécialisées sur le système $\mathscr{D}$ de Q. L'égalité élémentaire

$$\binom{d+3}{3} - \frac{d^2 + d}{6}(d-1) = (d+1)^2$$

montre que l'ajustage sur Q est réalisé.

La dîme est vérifiée d'après le Lemme IV.3 tandis que la dègue (cf. [AH,

p. 353]) l'est d'après le Théorème 1.1 de Hartshorne et Hirschowitz (cf. [HH]).

(b) $d = 3k+1$ *avec* k *dans* $[\![2, +\infty[\![$.

Nous allons encore exploiter Q. De l'inégalité

$$\forall d \in [\![6, +\infty[\![, \qquad \left[\frac{\varepsilon_{d+1}}{2}\right] + \varepsilon_d + 2\varepsilon'_{d-1} \geqslant 2k \qquad \text{(cf. Section VII.1)}$$

il résulte l'existence d'un triplet $(\gamma_{d-1}, \gamma_d, \gamma_{d+1})$ *maximal pour l'ordre lexicographique* tel que

$$\begin{cases} \gamma_{d+1} \in 2\mathbb{N} \cap [\![0, \varepsilon_{d+1}]\!], \\ \gamma_d \in [\![0, \varepsilon_d]\!], \\ \gamma_{d-1} \in [\![0, \varepsilon'_{d-1}]\!], \\ (\gamma_{d+1}/2) + \gamma_d + 2\gamma_{d-1} = 2k. \end{cases}$$

Soit alors L la spécialisation de Y définie par $L := A \cup B \cup C \cup D$ où

— A est la réunion de γ_{d+1} $(d+1)$-jetées de $D^{\varepsilon'}$, ou droites d'après la Section III.2.6, et de $\omega := ((d^2+d+4)/6) - \gamma_{d+1} - \gamma_d - \gamma_{d-1}$ jetées générales dans $\mathbb{P}^3_k$ de longueur supérieur ou égale à $d-1$ (Sections VII.2 et VII.3 montrent que ω est dans $\mathbb{N}$),

— B est la réunion de γ_d d-jetées de $D^{\varepsilon'}$ génériquement tangentes a Q (cf. Section III.2.1),

— C est la réunion de γ_{d-1} $(d-1)$-jetées de $D^{\varepsilon'}$ génériquement tangentes à Q,

— D est la réunion de toutes les autres jetées de Y spécialisées sur le système $\mathscr{D}$ de génératrices de Q.

Soit A' la spécialisation de A formée par $t := \gamma_{d+1}/2$ coniques dégénérées non réduites (cf. [HH, p. 176]) ayant leur point singulier général sur le système $\mathscr{D}$ de Q, réunies avec $(d^2+d+4)/6 - (\gamma_{d+1} + \gamma_d + \gamma_{d-1})$ jetées, de longueur supérieure ou égale à $d-1$, générales dans $\mathbb{P}^3_k$. Soit alors Z la spécialisation de Y définie par $Z := A' \cup B \cup C \cup D$.

L'égalité élémentaire

$$\binom{d+3}{3} - (d-1)\,\frac{d^2+d+4}{6} + 2\left(\frac{d-1}{3}\right) = (d+1)^2$$

montre que l'ajustage est réalisé sur Q.

Appliquons à Z le lemme d'Horace en exploitant Q, après avoir rappelé que l'intersection d'une des t coniques dégénérées non réduites avec Q est la réunion de deux points simples et d'un point triple liés à Q, tandis que le résiduel est une conique dégénérée réduite (cf. [HH, p. 176]).

V.5.2.1. *Vérification de la Dîme.* Les points rangés forment un ouvert du schéma de Hilbert (cf. [AH], par exemple); pour vérifier la dîme il nous suffit donc de montrer que la spécialisation H de la trace $Z \cap Q$ est rangée, où H est le schéma déduit de $Z \cap Q$ en spécialisant les 2-jetées, génériquement tangentes, sur $\mathscr{D}$.

Pour montrer que H est rangée distinguons deux cas:

— $\gamma_{d+1} = 0$.

Alors la dîme est vérifiée, d'après le Lemme IV.3, avec $\alpha = \beta = 3k + 1$.

— $\gamma_{d+1} > 0$, d'où $\gamma_{d+1} \geqslant 2$ (par définition de γ_{d+1}).

Du choix de $(\gamma_{d-1}, \gamma_d, \gamma_{d+1})$ (cf. Section V.5.2(b)) et de l'hypothèse $\gamma_{d+1} \geqslant 2$, il résulte que Z contient $(d^2+d+4)/6 - (\gamma_{d+1} + \gamma_d + \gamma_{d-1})$ $(d+1)$-jetées générales dans $\mathbb{P}^3_k$.

Désignons par $\mathcal{O}_j$ le nombre de j-jetées (de la trace) introverties sur le système $\mathscr{D}$. On a

$$\mathcal{O}_1 \geqslant 2t + 2\left(\frac{d^2+d+4}{6} - (\gamma_{d+1} + \gamma_d + \gamma_{d-1})\right) \geqslant 2t = \gamma_{d+1} \geqslant 2,$$

et la première condition du Lemme IV.4 est vérifiée. On a de même

$$\mathcal{O}_2 \geqslant \gamma_d + \gamma_{d-1},$$

d'où par addition

$$\mathcal{O}_1 + 2\mathcal{O}_2 \geqslant \frac{d^2+d+4}{3} - \gamma_{d+1},$$

d'où il résulte élémentairement que

$$\mathcal{O}_1 + 2\mathcal{O}_2 \geqslant \frac{3d+5}{2} - \gamma_{d+1}$$

puisque $d \geqslant 6$.

Par suite, la deuxième condition du lemme IV.4 est vérifiée et H est rangée d'après le Lemme IV.4.

V.5.2.2. *Vérification de la Dègue.* Nous allons à nouveau utiliser le lemme d'Horace pour montrer que le schéma résiduel R est rangé au niveau $d-2$. Pour cela remarquons qu'il existe une spécialisation S de R telle que $S = A \cup B \cup C \cup E$, où

— A est la réunion de $\gamma_{d+1}/2$ coniques réduites spécialisées de façon qu'une des deux droites de chaque conique soit contenue dans le système $\mathscr{D}$ de génératrices de Q, l'autre droite restant générale;

— B est la réunion de $\gamma_{d-1}(d-3)$-jetées et de $\gamma_d(d-2)$-jetées générales tangentes à Q;

— C est la réunion de $((d-1)(d-2)/6-\gamma_{d+1}/2)$ $(d-1)$-jetées générales (ou droites) dans $\mathbb{P}^3_k$; Ceci est possible puisque d'une part

$$\frac{(d-1)(d-2)}{6} \geqslant \frac{\gamma_{d+1}}{2} \qquad \text{(cf. Section VII.2)}$$

et d'autre part

$$\frac{d^2+d+4}{6}-(\gamma_{d+1}+\gamma_d+\gamma_{d-1}) \geqslant \frac{(d-1)(d-2)}{6}-\frac{\gamma_{d+1}}{2} \qquad \text{(cf. Section VII.3);}$$

— E est la réunion de toutes les autres jetées de R spécialisées sur le système $\mathscr{D}$ de Q.

Remarquons que d'après l'ouverture des points rangés dans le schéma de Hilbert il nous suffit de montrer que la spécialisation R' de R définie par $R' := A \cup B' \cup C \cup E$, où B' est la réunion de γ_{d-1} $(d-3)$-jetées et de γ_d $(d-2)$-jetées générales sur le système $\mathscr{D}$ de Q, est rangée.

L'égalité élémentaire

$$\binom{d-2+3}{3}-\frac{(d-1)(d-2)}{6}(d-3)=(d-2+1)^2$$

nous montre que l'ajustage est réalisé sur Q. Exploitons alors le diviseur Q.

Vérification de la Dîme. Le Lemme IV.3 montre que la dîme est vérifiée.

Vérification de la Dègue. Le Théorème 1 de [HH] nous montre que la dègue est vérifiée.

V.5.3. *2ème Cas.* $\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d+\varepsilon'_{d-1}<(d^2+d+4)/6$ $(d\geqslant 6)$.

Nous allons encore exploiter Q. Notons s l'entier $[d/3]$. L'inégalité

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{d-2}>2s+2 \qquad \text{(cf. Section VII.4)}$$

montre que Y contient au moins $2s+2$ jetées de longueur inférieure ou égale à $d-2$. En outre l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{j=d-2} j\varepsilon_j>(2s+2)(d-2) \qquad \text{(cf. Section VII.4)}$$

montre qu'il existe une première spécialisation $\tilde{Y} := D^{\tilde{\varepsilon}'} \cup D^{\tilde{\varepsilon}''}$ de Y, où $D^{\tilde{\varepsilon}'}$ est générale dans $\mathbb{P}_k^3$ et $D^{\varepsilon''}$ est $\mathscr{D}$-générale, obtenue par des collisions de front (cf. [E, Sect. II.3]) entre jetées de longueur inférieure ou égale à $d-2$, éventuellement spécialisées sur $\mathscr{D}$, telle que

$$\tilde{\varepsilon}_1'' + \tilde{\varepsilon}_2'' + \cdots + \tilde{\varepsilon}_{d-2}'' \leqslant \varepsilon_1'' + \cdots + \varepsilon_{d-2}'' \leqslant s+1,$$

$$\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j \qquad \text{si} \quad j \geqslant d-1,$$

$$1 \geqslant \tilde{\varepsilon}_1'' + \tilde{\varepsilon}_2'' + \cdots + \tilde{\varepsilon}_{[d-2/2]}'',$$

et

$$\tilde{\varepsilon}_{[d-2/2]+1} + \cdots + \tilde{\varepsilon}_{d-2} \geqslant 2s.$$

Or d étant dans $⟦6, +\infty⟦$ on a

$$\left[\frac{d-2}{2}\right] + 1 \geqslant 3.$$

Soit alors Y_1 une spécialisation de $\tilde{Y}$ définie par $Y_1 := A \cup B \cup C$, où

— A est la réunion de s jetées, de longueur dans $⟦3, d-2⟧$, spécialisées sur $\mathscr{D}$ et que nous noterons $\Delta_{\mathscr{D}}^{l_i}$, i variant dans $⟦1, s⟧$;

— B est la réunion de s jetées, de longueur dans $⟦3, d-2⟧$, générales dans $\mathbb{P}_k^3$ et que nous noterons D^{k_i}, i variant dans $⟦1, s⟧$;

— C est la réunion de toutes les autres jetées de Y, qui sont générales dans $\mathbb{P}_k^3$ sauf au plus une $\mathscr{D}$-jetée générale de longueur exactement $d-1$ (par hypothèse), une $\mathscr{D}$-jetée générale de longueur inférieure ou égale à $d-2$.

Soit P l'ensemble défini par

$$P := \{ i \in ⟦1, s⟧ / \min(l_i, k_i) < d-3 \text{ et } l_i \neq k_i \}$$

et soit p le cardinal de P. Quitte à réordonner nos jetées on peut toujours supposer que $P = ⟦1, p⟧$ (toujours avec la convention que $⟦a, b⟧ = \varnothing$ si $b < a$).

Alors à toute application θ: $⟦1, p⟧ \to \{0, 1, 2, 3\}$ associons une spécialisation Z_θ de Y_1 définie par

$$Z_\theta = A_\theta \cup C \cup E,$$

où A_θ est la réunion de p jetées d'ordre deux obtenues par collisions de biais (cf. [E, Sect. II.4]) dans le plan générique transverse à Q et le long de la génératrice générique de $\mathscr{D}$.

Plus précisément A_θ est la réunion des jetées d'ordre deux $\Delta_{\mathscr{D}}^{\beta_i, \alpha_i}$, pour i dans $[\![1, p]\!]$, avec

$$\beta_i := \max(l_i, k_i) + \theta_i$$

et

$$\alpha_i := \min(l_i, k_i) - \theta_i$$

et où E est la réunion des jetées $\Delta_{\mathscr{D}}^{l_i}$ et D^{k_i}, i variant dans $[\![p+1, s]\!]$.

Notons θ_0 l'application nulle de $[\![1, p]\!]$ vers $\{0, 1, 2, 3\}$. Soit W_{θ_0} une spécialisation de Z_{θ_0} définie par

$$W_{\theta_0} := A_{\theta_0} \cup C' \cup C'' \cup E,$$

où C' est la réunion de jetées de C spécialisés sur $\mathscr{D}$ et C'' la réunion des autres jetées de C, restant générales dans $\mathbb{P}_k^3$, de telle sorte que la colongueur de la trace de W_{θ_0} sur Q soit un entier L de l'intervalle

$$I := [\![(d+1)^2 - (d-2); (d+1)^2]\!].$$

L'existence de C' et de C'' est assurée d'une part, par l'inégalité

$$2\varepsilon_{d+1} + \varepsilon_d + (s+1)(d-2) + d - 1 \leqslant (d+1)^2 \qquad \text{(cf. Section VII.5)},$$

qui nous montre que la colongueur de la trace sur Q de Z_{θ_0} n'est pas trop grande pour pouvoir ajuster sur Q (cf. Section V.0); d'autre part par la spécialisation de jetées augmentant la colongueur de la trace d'au plus $d-1$; enfin, par l'inégalité élémentaire

$$\binom{d+3}{3} - (d-2)\left[\frac{d}{3}\right] > (d+1)^2,$$

qui nous montre que la colongueur de C est assez grande pour que la colongueur de la trace de W_{θ_0} sur Q soit dans l'intervalle I.

Désignons alors par α l'entier $\alpha := (d+1)^2 - L$ et par (q, r) l'unique couple d'entiers défini par

$$\alpha = 3q + r \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < 3,$$

et remarquons que l'inégalité triviale

$$\forall d \in [\![6, +\infty[\![, \qquad d - 2 \leqslant 3\left[\frac{d}{3}\right],$$

nous montre que si $q = s$ alors $r = 0$.

Soit alors S une spécialisation de Y ainsi définie:

1er Cas. $(q \leqslant p-1)$ ou $(q=p$ et $r=0)$.

Soit

$$\begin{aligned} \theta' \colon [\![1, p]\!] &\to \{0, 1, 2, 3\} \\ i &\mapsto 3 \quad \text{si} \quad i \in [\![1, q]\!], \\ q+1 &\mapsto r, \\ i &\mapsto 0 \quad \text{si} \quad i > q+1 \end{aligned}$$

(avec les conventions évidentes si $q=p$). Alors nous posons

$$S = A_{\theta'} \cup C' \cup C'' \cup E.$$

2ème Cas. $(q>p)$ ou $(q=p$ et $r>0)$.

Alors notons θ'' l'application constante et égale à 3 de $[\![1, p]\!]$ vers $\{0, 1, 2, 3\}$. Désignons d'autre par par E' la réunion

— si $r=0$: des $q-p$ jetées d'ordre deux $\Delta_{\mathscr{D}}^{\gamma_i, \gamma'_i}$ pour i dans $[\![p+1, q]\!]$ (car $q \leqslant s$) avec $\gamma_i = l_i + 3$ et $\gamma'_i = k_i - 3$ obtenues par collision de biais comme ci-dessus;

— si $r>0$: des $q-p+1$ jetées d'ordre deux $\Delta_{\mathscr{D}}^{\gamma_i, \gamma'_i}$ pour i dans $[\![p+1, q]\!]$ avec $\gamma_i = l_i + 3$ et $\gamma'_i = k_i - 3$ et de la jetée

$$\Delta_{\mathscr{D}}^{\gamma_{q+1}, \gamma'_{q+1}}$$

avec

$$\gamma_{q+1} = l_{q+1} + r \qquad \text{et} \qquad \gamma'_{q+1} = k_{q+1} - r,$$

obtenues par collision de biais comme ci-dessus, et désignons par E'' la réunion des autres jetées de E, c'est à dire les jetées $\Delta_{\mathscr{D}}^{l_i}$ et D^{k_i} pour i dans $[\![q+1+[(r+2)/3], s]\!]$.

Alors nous posons $S = A_{\theta''} \cup C' \cup C'' \cup E' \cup E''$.
Par construction l'ajustage sur Q est réalisé pour S puisque par construction la colongueur de la trace de S sur Q est bien $(d+1)^2$. Exploitons alors Q.

Vérification de la Dîme. La dîme est vérifiée d'après le Lemme IV.3.

Vérification de la Dègue. La dègue sera vérifiée d'après l'hypothèse de récurrence H_{d-2} dès que nous aurons vérifié les hypothèses de récurrence sur le résiduel. A cet effet remarquons que l'inégalité évidente

$$\forall d \in [\![6, +\infty[\![, \qquad \left[\frac{d}{3}\right] \leqslant \left[\frac{d-2}{3}\right] + 1,$$

nous montre qu'il n'y a pas trop de jetées liées à Q dans le résiduel, leur longueur étant, par construction de E' et de θ' et θ'', inférieure ou égale à $d-4$, sauf, peut-être, l'une d'entre elles qui peut être de longueur $d-3$ (c'est le cas si $r=1$ et $l_{q+1}=k_{q-1}=d-2$).

Il nous reste à montrer que H_4 et H_5 sont vraies.

V.5.4. *Vérification de* H_5. Distinguons encore les deux cas:

V.5.4.1. Si $\varepsilon_6+\varepsilon_5+\varepsilon'_4\geqslant 6$, la démonstration décrite en Section V.5.2(a) s'applique.

V.5.4.2. Si $\varepsilon_6+\varepsilon_5+\varepsilon'_4<6$, $D^{\varepsilon''}$ contient au plus une $\mathscr{D}$-jetée générale de longueur quatre et deux $\mathscr{D}$-jetées générales de longueur inférieure ou égale à trois. Il en résulte que par des collisions de front entre les jetées générales de $D^{\varepsilon'}$ de longueur inférieure ou égale à trois, Y admet une spécialisation $\tilde{Y}:=D^{\tilde{\varepsilon}'}\cup D^{\tilde{\varepsilon}''}$, où $D^{\tilde{\varepsilon}'}$ est générale dans $\mathbb{P}^3_k$ et $D^{\tilde{\varepsilon}''}$ $\mathscr{D}$-générale, telle que

$$\tilde{\varepsilon}'_6+\tilde{\varepsilon}'_5+\tilde{\varepsilon}'_4\geqslant\left\lceil\frac{\binom{8}{3}-(4+3+3)}{6}\right\rceil=7.$$

$\tilde{Y}$ est donc rangée d'après la Section V.5.4.1, et Y aussi.

V.5.5. *Vérification de* H_4. Distinguons encore deux cas.

V.5.5.1. Soit $\varepsilon_5+\varepsilon_4+\varepsilon'_3\geqslant 4$.

La minoration (section VII.1) n'est plus valable mais nous avons encore

$$\left[\frac{\varepsilon_5}{2}\right]+\varepsilon_4+2\varepsilon'_3\geqslant 2.$$

En effet

$$\left[\frac{\varepsilon_5}{2}\right]+\varepsilon_4+2\varepsilon'_3\geqslant\frac{\varepsilon_5}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_4+\varepsilon'_3}{2}\geqslant\frac{\varepsilon_5+\varepsilon_4+\varepsilon'_3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}.$$

donc l'entier $[\varepsilon_5/2]+\varepsilon_4+2\varepsilon'_3$ est supérieur ou égal à deux.

Définissons alors γ_5, γ_4, γ_3 et t comme dans la Section V.5.2(b).

— Si $\gamma_5=0$ ou si $\gamma_5=2$, les spécialisations décrites en Section V.5.2(b) montrent que Y est rangé.

— Si $\gamma_5=4$, alors $\varepsilon_5\geqslant 4$, d'où $\gamma_4=\gamma_3=0$ et par suite, d'après le choix du triplet $(\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5)$, $\varepsilon_4=\varepsilon'_3=0$.

Distinguons trois cas:

— Si $\varepsilon_5=7$, alors $\varepsilon_i=0$ pour tout $i\in[\![1,4]\!]$ et le Théorème 1.1 de [HH] montre que Y est rangé.

— Si $4 \leqslant \varepsilon_5 \leqslant 5$, on a, compte tenu des hypothèses faites sur $D^{\varepsilon''}$, $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 > 0$, puisque $\varepsilon_4 = \varepsilon'_3 = 0$. Soit alors Z une spécialisation de Y définie par $Z := A \cup B$, où

— A est la réunion de trois 5-jetées générales dans $\mathbb{P}^3_k$ et d'un point si $\varepsilon'_1 > 0$, d'une 2-jetée extravertie sur Q si $\varepsilon'_1 = 0$,

— B est la réunion de toutes les autres jetées de Y spécialisées sur $\mathscr{D}$.

Une exploitation de Q montre que Y est rangé puisque la dîme est vérifiée par le Lemme IV.3 tandis que la dègue l'est d'après [HH, Théorème 1.1].

— Si $\varepsilon_5 = 6$, alors Y admet une spécialisation $\tilde{Y}$, obtenue par collision de front, telle que $\tilde{\varepsilon}'_5 = 7$ (en remarquant que pour une droite la contrainte d'être sur une quadrique est vide); $\tilde{Y}$ est donc rangé d'après ce qui précède, et par suite Y l'est aussi.

V.5.5.2. Soit à présent $\varepsilon_5 + \varepsilon_4 + \varepsilon'_3 < 4$. Alors, $D^{\varepsilon''}$ contient au plus deux $\mathscr{D}$-jetées de longueur inférieure ou égale à deux et une $\mathscr{D}$-jetée de longueur trois.

Il en résulte que par des collisions de front entre les jetées générales de $D^{\varepsilon'}$ de longueur inférieure à trois, Y admet une spécialisation $\tilde{Y}$ telle que, avec des notations évidentes,

$$\tilde{\varepsilon}'_5 + \tilde{\varepsilon}'_4 + \tilde{\varepsilon}'_3 \geqslant \left[\frac{\binom{7}{3} - (2+2+3)}{5} \right] = 5.$$

D'après la Section V.5.5.1, $\tilde{Y}$ est rangée et par suite Y l'est aussi.

VI. Suffisance des Conditions de la Section II.3.1 pour N dans $[\![4, +\infty[\![$

Désignons encore par Q une quadrique propre de $\mathbb{P}^3_k$ et par $\mathscr{D}$ un système de génératrices de Q. Soit aussi $\mathbf{H}$ un hyperplan de $\mathbb{P}^N_k$. Ici encore nous allons démontrer un énoncé plus général que celui recherché. Pour cela définissons, pour d et N entiers naturels de $\mathbb{N}$, les énoncés $K_{d,N}$ et $K'_{d,N}$ par

$K_{d,N}$. Soit $Y := D^{\varepsilon'} \cup D^{\varepsilon''}_H$, où $D^{\varepsilon'}$ est la multijetée générale de $\mathbb{P}^N_k$ associée à ε' et $D^{\varepsilon''}_H$ la multijetée générale dans $\mathbf{H}$ associée à ε'' avec

$$\varepsilon'_s = \varepsilon''_s = 0 \qquad \text{si } s \text{ est dans } [\![d+2, +\infty[\![,$$

$$\varepsilon''_{d+1} = 0,$$

$$\varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 + \cdots + \varepsilon''_d \leqslant d,$$

et

$$\sum_{j=1}^{j=d+1} j(\varepsilon_j' + \varepsilon_j'') = \binom{N+d}{N};$$

alors Y est rangé au niveau d.

Notation. Pour j dans $\mathbb{N}$ nous poserons $\varepsilon_j := \varepsilon_j' + \varepsilon_j''$.

$K'_{d,N}$. Soit $Y := D^\varepsilon \cup T_t$, où D^ε est la multijetée générale de $\mathbb{P}_k^N$ associée à ε et T_t la réunion de t (2, 1)-jetées générales dans $\mathbb{P}_k^N$ avec

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_s = 0 & \text{si } \ s \text{ est dans } [\![d+2, +\infty[\![, \\ t \leqslant d-1 & \text{si } \ d \text{ est dans } [\![1, +\infty[\![, \\ t = 0 & \text{si } \ d = 0, \\ \varepsilon_1 \geqslant d-1 & \end{array}$$

et

$$3t + \sum_{j=1}^{j=d+1} j\varepsilon_j = \binom{N+d}{N};$$

alors Y est rangé au niveau d.

Montrons alors la proposition

VI.1. PROPOSITION. *Pour $d \in \mathbb{N}$, et $N \in [\![4, +\infty[\![$, $K_{d,N}$ et $K'_{d,N}$ sont vraies.*

Dans le cas où N est supérieur ou égal à 4, remarquons que la suffisance des conditions de la Proposition II.3.1 résultera de la véracité de $K_{d,N}$.

Démonstration de la Proposition VI.1. La Proposition VI.1 va résulter, par récurrence, des six affirmations suivantes:

$$\forall d \in \{0,1\}, \forall N \in [\![3, +\infty[\![, \qquad K_{d,N} \text{ et } K'_{d,N} \text{ sont vraies;} \tag{A$_1$}$$

$$\forall d \in [\![2, +\infty[\![, \qquad K'_{d,3} \text{ est vraie;} \tag{A$_2$}$$

$$\forall d \in [\![2, +\infty[\![, \qquad K'_{d,3} + K_{d-1,4} \Rightarrow K_{d,4}; \tag{A$_3$}$$

$$\forall d \in [\![2, +\infty[\![, \qquad K_{d-1,4} \Rightarrow K'_{d,4}; \tag{A$_4$}$$

$$\left.\begin{array}{r} \forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![5, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad K_{d,N-1} + K_{d-1,N} \Rightarrow K'_{d,N}; \tag{A$_5$}$$

$$\left.\begin{array}{r} \forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![5, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad K'_{d,N-1} + K_{d,N-1} + K_{d-1,N} \Rightarrow K_{d,N}. \tag{A$_6$}$$

VI.2. *Démonstration de* (A_1). $K_{0,N}$ et $K'_{0,N}$ sont triviaux; $K_{1,N}$, aussi bien que $K'_{1,N}$ sont des énoncés moins spéciaux que [HH, Théorème 1.1].

VI.3. *Démonstration de* (A_2). Nous allons exploiter la quadrique Q. Notons d'abord que l'inégalité

$$2t+\varepsilon_d+2\varepsilon_{d+1}\leqslant(d+1)^2 \qquad \text{(cf. Section VII.6).}$$

montre que la colongueur de Y n'est pas trop grande pour pouvoir ajuster. Enfin l'inégalité élémentaire

$$t+d-2\leqslant 2d-3\leqslant\binom{d+3}{3}-(d+1)^2$$

montre qu'il existe une spécialisation Z de Y définie par $Z:=A\cup B\cup C\cup D$, où

— A est la réunion de t (2, 1)-jetées ambiverties sur la famille $\mathscr{D}$ de génératrices de Q,

— B, dont la colongueur vaut $(d+1)^2-2t-x$ où x est dans $[\![0, d-2]\!]$, est la réunion de jetées simples de Y introverties sur le système $\mathscr{D}$ de Q,

— C est la réunion de x points simples spécialisés sur $\mathscr{D}$,

— D est la réunion des autres jetées qui sont générales dans $\mathbb{P}_k^N$.

Il nous suffit de montrer que Z est rangé.

Vérification de la Dîme. La dîme est vérifiée d'après le Lemme IV.3.

Vérification de la Dègue. Remarquons que le schéma résiduel contient t points simples génériques sur le système $\mathscr{D}$ de Q, et distinguons deux cas:

1*er Cas.* $d\geqslant 5$.

L'inégalité élémentaire

$$\forall d\in[\![5, +\infty[\![, \qquad \left(\left[\frac{d-2}{3}\right]+1\right)(d-4)+d-3\geqslant d-1\geqslant t \qquad \text{(VI.3.1)}$$

montre alors que R est moins spécial que le schéma Y de la Proposition V.5.1. (On peut se ramener à Y par au plus $t-1$ collisions de front entre les t points simples liés à Q.) La Proposition V.5.1 montre alors que R est rangé au niveau $d-2$ et la dègue est vérifiée.

2*ème Cas.* $2\leqslant d\leqslant 4$.

L'inégalité VI.3.1 n'est plus vérifiée mais la dègue est vérifiée d'après la Section V puisque, pour trois points (ou moins de trois points) la contrainte d'être sur une quadrique est vide.

VI.4. *Démonstration de* (A_6). Comme [HH] désignons, pour N et d donnés, par $s(d, N)$ et $p(d, N)$ les entiers uniques définis par

$$\binom{\mathbf{N}+\mathbf{d}}{\mathbf{N}} = (d+1)\, s(d, N) - p(d, N)$$

et

$$0 \leqslant p(d, N) \leqslant d.$$

Distinguons deux cas:

VI.4.1. 1*er Cas.* $\varepsilon_{d+1} \geqslant s(d-1, N)$.

Nous allons utiliser encore le lemme d'Horace en exploitant un hyperplan **H** de $\mathbb{P}_k^N$. L'inégalité

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \quad s(d-1, N) - 2p(d-1, N) \geqslant d-1 \qquad \text{(cf. Section VII.7)}$$

montre qu'il existe une spécialisation Z de Y définie par $Z = A \cup B \cup C$, où

— A est la réunion de $2p(d-1, N)$ $(d+1)$-jetées, ou droites (cf. Section III.2.6.) spécialisées en $p(d-1, N)$ coniques dégénérées ayant leur point singulier général dans **H** (cf. [HH, p. 176]),

— B est la réunion de $s(d-1, N) - 2p(d-1, N)$ $(d+1)$-jetées générales dans $\mathbb{P}_k^N$,

— C est la réunion de toutes les autres jetées de Y introverties dans **H**.

Exploitons **H**.

Vérification de la Dîme. La dîme est vérifiée d'après $K'_{d,N-1}$ puisque, d'une part, l'inégalité $p(d-1, N) \leqslant d-1$ montre qu'il n'y a pas trop de points triples dans H, et d'autre part, l'inégalité (VII.7) montre que la trace contient au moins $d-1$ points simples génériques dans H.

Vérification de la Dègue. La dègue est vérifiée par Hartshorne et Hirschowitz (cf. [HH, p. 182]).

VI.4.2. 2*ème Cas.* $\varepsilon_{d+1} < s(d-1, N)$.

Nous allons encore exploiter le diviseur **H**, mais remarquons déjà que l'inégalité

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{j=d} \varepsilon_j \geqslant (2d-1) \qquad \text{(cf. Section VII.8)}$$

montre que Y contient au moins $2d-1$ jetées de longueur inférieure ou égale à d, dont par l'hypothèse $(K_{d,N})$, au plus d sont introverties dans **H**. Soit donc Y_1 une première spécialisation de Y telle que $Y_1 := A \cup B \cup C$, où

— A est la réunion de d jetées de longueur inférieure ou égale à d, introverties dans **H**; nous les noterons $\Delta_H^{l_i}$, où l_i est entier et i est dans $[\![1. d]\!]$,

— B est la réunion de $d-1$ jetées générales dans $\mathbb{P}_k^N$, de longueur inférieure ou égale à d; nous les noterons donc D^{k_i} où k_i est entier et i dans $[\![1, d-1]\!]$,

— C est la réunion de toutes les autres jetées de Y qui sont générales dans $\mathbb{P}_k^N$.

Désignons par P l'ensemble défini par

$$P := \{i \in [\![1, d-1]\!] / l_i \neq k_i\}$$

et par p le cardinal de P. Quitte à renuméroter les jetées on peut supposer que $P = [\![1, p]\!]$.

A toute application θ de $[\![1, p]\!]$ vers $\{0, 1\}$ associons la spécialisation Z_θ de Y_1 définie par $Z_\theta := A_\theta \cup E \cup C$, où

— A_θ est la réunion de p jetées d'ordre deux ambiverties dans H, à savoir les jetées $\Delta_H^{\alpha_i, \beta_i}$, obtenues par collision de biais, pour i dans $[\![1, p]\!]$ avec

$$\alpha_i = \max(k_i, l_i) + \theta_i \qquad \text{et} \qquad \beta_i = \min(k_i, l_i) - \theta_i,$$

— E est la réunion des jetées $\Delta_H^{l_i}$ et D^{k_i}, pour i dans $[\![p+1, d-1]\!]$, et de la jetée $\Delta_H^{l_d}$.

Désignons par θ_0 l'application identiquement nulle de $[\![1, p]\!]$ vers $\{0, 1\}$. L'inégalité

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \quad \varepsilon_{d+1} + d^2 \leqslant \binom{d+N-1}{d} \qquad \text{(cf. (VII.9))}$$

montre que la colongueur de la trace de Z_{θ_0} sur **H** n'est pas trop grande (pour pouvoir ajuster). Soit W_{θ_0} une spécialisation de Z_{θ_0} définie par

$$W_{\theta_0} := Z_{\theta_0} \cup E \cup C' \cup C'',$$

où C' est la réunion de jetées de C introverties dans **H** et C'' la réunion des autres jetées de C de telle sorte que la colongueur de la trace de W_{θ_0} sur **H** soit un entier L de l'intervalle

$$J = \left[\!\!\left[\binom{N+d-1}{d} - (d-1), \binom{N+d-1}{d} \right]\!\!\right].$$

L'existence de C' et C'' est assurée par l'inégalité

$$\left.\begin{matrix} \forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{matrix}\right\} \qquad d(d-1) \leqslant \binom{N+d-1}{d-1} \qquad \text{(cf. Section VII.10)}$$

qui montre que la colongueur de la trace peut être rendue assez grande.

Désignons alors par α l'entier

$$\alpha := \binom{N+d-1}{d} - L,$$

et définissons une nouvelle spécialisation S de Y en distinguant trois cas:

— si $\alpha = 0$ posons $S := W_{\theta_0}$;

— si $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, considérons l'application

$$\begin{aligned} \theta' [\![1, p]\!] &\to \{0, 1\} \\ i &\mapsto 1 \qquad \text{si} \quad i \in [\![1, \alpha]\!], \\ i &\mapsto 0 \qquad \text{sinon,} \end{aligned}$$

et posons

$$S := A_{\theta'} \cup E \cup C' \cup C'';$$

— si $p < \alpha \leqslant d-1$ alors notons θ_1 l'application de $[\![1, p]\!]$ vers $\{0, 1\}$ constante et égale à 1 et posons $S := A_{\theta_1} \cup C' \cup C'' \cup E' \cup E''$, où

— E' est la réunion de $\alpha - p$ jetées d'ordre deux ambiverties dans **H** et obtenues par collisions de biais dans le plan générique transverse à **H** entre les jetées $\Delta_H^{l_i}$ et D^{k_i}, de E, pour i variant dans $[\![p+1, \alpha]\!]$ (on a donc $l_i = k_i$). Plus précisément E' est la réunion des $\alpha - p$ jetées $\Delta_H^{\alpha_i, \beta_i}$ pour i dans $[\![p+1, \alpha]\!]$, $\alpha_i = l_i + 1$ et $\beta_i = k_i - 1 = l_i - 1$.

— E'' est la réunion des autres jetées de E, c'est à dire des jetées

$$\Delta_H^{l_i} \qquad \text{pour } i \text{ dans } [\![\alpha+1, d]\!]$$

et des jetées

$$D^{k_i} \qquad \text{pour } i \text{ dans } [\![\alpha+1, d-1]\!].$$

Alors par construction de S l'ajustage sur $\mathbf{H}$ est réalisé. Exploitons donc $\mathbf{H}$.

Vérification de la Dîme. La dîme est vérifiée d'après $K_{d,N-1}$.

Vérification de la Dègue. La dègue est vérifiée d'après $K_{d-1,N}$.
En effet par construction de S, le résiduel de S ne contiendra qu'au plus $d-1$ jetées de longueur inférieure ou égale à $d-1$, spécialisées dans $\mathbf{H}$.

VI.5. *Démonstration de* (A_3). (A_3) résulte de la démonstration de (A_6) dans laquelle on choisit N égal à 4 en remarquant toutefois que la dîme de la Section VI.4.2 est vérifiée d'après la Section V (et non pas d'après $K_{d,3}$ qui est faux, la colongueur de la trace sur H étant "trop grande" comme le montre l'exemple où $D_{\mathbf{H}}^{\varepsilon''}$ contient quatre 4-jetées spécialisées dans $\mathbf{H}$ avec d égal à 4).

VI.6. *Démonstration de* (A_5). Nous allons encore exploiter l'hyperplan $\mathbf{H}$. Soit Y_1 une première spécialisation de Y définie par $Y_1 := A \cup B \cup C$, où

— A est la réunion des t (2, 1)-jetées ambiverties dans $\mathbf{H}$,
— B est la réunion de $d-1$ points génériques dans $\mathbb{P}_k^N$,
— C est la réunion de toutes les autres jetées de Y.

L'inégalité

$$\left.\begin{array}{l} \forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall \mathbb{N} \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad \varepsilon_{d+1} + 2t \leqslant \binom{N+d-1}{d} \qquad \text{(cf. Section VII.11)}$$

montre que la colongueur de la trace de Y_1 sur $\mathbf{H}$ n'est pas trop grande (pour pouvoir ajuster). D'autre par l'inégalité

$$\left.\begin{array}{l} \forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall \mathbb{N} \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad t+d-1 \leqslant \binom{N+d-1}{d-1} \qquad \text{(cf. Section VII.12)}$$

montre qu'il existe une spécialisation Y_2 de Y_1 définie par $Y_2 := A \cup B \cup C' \cup C''$, où C' est la réunion de jetées de C spécialisées dans $\mathbf{H}$ et

C'' est la réunion des autres jetées de C qui restent donc générales dans $\mathbb{P}_k^N$, de telle sorte que la colongueur de Y_2 soit un entier L de l'intervalle

$$\left[\!\left[\binom{N+d-1}{d}-(d-1), \binom{N+d-1}{d}\right]\!\right].$$

Désignons par α l'entier défini par

$$\alpha := \binom{N+d-1}{d} - L.$$

Enfin soit Y_3 une specialisation de Y_2 définie par

$$Y_3 := A \cup C' \cup C'' \cup B' \cup B'',$$

où B' est la réunion de α points de B spécialisés dans $\mathbf{H}$ et B'' la réunion des $d-1-\alpha$ points de B restants, toujours génériques dans $\mathbb{P}_k^N$. Par construction, l'ajustage de Y_3 sur $\mathbf{H}$ est réalisé. Exploitons $\mathbf{H}$.

Vérification de la Dîme. La dîme est vérifiée d'après $K_{d,N-1}$.

Vérification de la Dègue. La dègue est vérifiée d'après $K_{d-1,N}$, puisque le résiduel ne contient qu'au plus $d-1$ points simples liés à H (provenant des t (2, 1)-jetées).

VI.7. *Démonstration de* (A_4). (A_4) résulte de la démonstration de (A_5) dans laquelle on a choisi N égal à 4, en remarquant toutefois que la dîme est vérifiée d'après V (et non d'après $K_{d,3}$, cf. Section VI.5).

VII. Vérification des Conditions Numériques Intervenant dans les Sections V et VI

VII.1. $[\varepsilon_{d+1}/2] + \varepsilon_d + 2\varepsilon'_{d-1} \geqslant \varepsilon_{d+1}/2 - \frac{1}{2} + \varepsilon_d + 2\varepsilon'_{d-1} \geqslant (\varepsilon_{d+1} + \varepsilon_d + \varepsilon'_{d-1})/2 - \frac{1}{2} \geqslant (d^2+d+4)/12 - \frac{1}{2} \geqslant 2(d-1)/3 = 2k$ dès que $d \geqslant 6$.

VII.2. $\gamma_{d+1}/2 \leqslant \gamma_{d+1}/2 + \gamma_d + 2\gamma_{d-1} = 2(d-1)/3 \leqslant (d-1)(d-2)/6$ dès que d est dans $[\![6, +\infty]\!]$.

VII.3. Il nous suffit de montrer que

$$\frac{d^2+d+4}{6} - \left(\frac{\gamma_{d+1}}{2} + \gamma_d + 2\gamma_{d-1}\right) \geqslant \frac{(d-1)(d-2)}{6}$$

c'est à dire

$$\frac{d^2+d+4}{6}-\frac{2(d-1)}{3}\geqslant\frac{(d-1)(d-2)}{6};$$

cette inégalité se vérifiant élémentairement.

VII.4. On a

$$\begin{aligned}(d-2)\sum_{j=1}^{j=d-2}\varepsilon_j &\geqslant \sum_{j=1}^{j=d-2} j\varepsilon_j\\ &\geqslant \binom{d+3}{3}-(d+1)(\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d+\varepsilon_{d-1})\\ &\geqslant \binom{d+3}{3}-(d+1)(\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d+\varepsilon'_{d-1}+1)\\ &\geqslant \binom{d+3}{3}-(d+1)\left(\frac{d^2+d+4}{6}\right)\\ &\qquad\text{(d'après l'hypothèse)}\\ &> \left(2\left[\frac{d}{3}\right]+2\right)(d-2) \qquad \text{(élémentaire)}\end{aligned}$$

pour d dans $[\![6, +\infty[\![$.

$$2\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d+(s+1)(d-2)+d-1\leqslant(d+1)^2. \tag{VII.5}$$

On a

$$\begin{aligned}&2\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d+(s+1)(d-2)+d-1\\ &\quad\leqslant 2(\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d+\varepsilon'_{d-1})+(s+1)(d-2)+d-1\\ &\quad\leqslant 2\left(\frac{d^2+d+4}{6}\right)+\left(\frac{d}{3}+1\right)(d-2)+d-1 \qquad \text{(par hypothèse)}\\ &\quad\leqslant (d+1)^2 \qquad \text{(élémentaire).}\end{aligned}$$

$$2t+\varepsilon_d+2\varepsilon_{d+1}\leqslant(d+1)^2. \tag{VII.6}$$

En effet, de l'hypothèse

$$3t+\sum_{j=1}^{j=d+1} j\varepsilon_j=\binom{d+3}{3}$$

il résulte que

$$3t+(d+1)\,\varepsilon_{d+1}+d\varepsilon_d \leqslant \binom{d+3}{3}$$

d'où

$$3t+d(\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d) \leqslant \binom{d+3}{3}$$

d'où

$$6t+2d(\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d) \leqslant 2\binom{d+3}{3}$$

et puisque

$$t \leqslant d-1$$

il vient

$$(2d-6)\,t+6t+2d(\varepsilon_d+\varepsilon_{d+1}) \leqslant 2\binom{d+3}{3}+(2d-6)(d-1)$$

d'où

$$3d(2t+2\varepsilon_{d+1}+\varepsilon_d) \leqslant d^3+12d^2-13d+24;$$

or un calcul élémentaire montre que

$$\forall d \in [\![2,\ +\infty[\![, \qquad d^3+12d^2-13d+24 \leqslant 3d(d+1)^2,$$

d'où résulte l'inégalité (VII.6).

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2,\ +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4,\ +\infty[\![\end{array}\right\} \quad s(d-1,\,N)-2p(d-1,\,N) \geqslant d-1. \qquad \text{(VII.7)}$$

VII.7.1. (a) Soit $d \geqslant 5$.
Il nous suffit de vérifier que

$$s(d-1,\,N)-2(d-1) \geqslant (d-1).$$

Or nous savons que

$$s(d-1,\,N) \geqslant \frac{\binom{N+d-1}{d-1}}{d}.$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$\binom{N+d-1}{d-1} \geqslant 3d(d-1).$$

Pour d fixé dans $[\![2, +\infty[\![$ la suite définie par $\varphi_d(N)=\binom{N+d-1}{d-1}$ étant croissante sur $[\![4, +\infty[\![$, il suffit de faire voir que

$$\binom{d+3}{d-1} \geqslant 3d(d-1),$$

ce qui est vrai dès que $d \geqslant 5$.

VII.7.2. (b) Soit $d=4$.
Vérifions directement que

$$\forall N \in [\![4, +\infty[\![, \qquad s(3, N)-2p(3, N) \geqslant 3.$$

On a

$$s(3, N)=\frac{\binom{N+3}{3}+p(3, N)}{4},$$

avec $0 \leqslant p(3, N) \leqslant 3$. Il suffit donc que

$$\frac{\binom{N+3}{3}}{4} \geqslant 9$$

ce qui est vrai si N est dans $[\![5, +\infty[\![$.
Enfin si $N=4$, alors $s(3, 4)=9$, $p(3, 4)=1$ et (VII.7) est aussi vérifiée.

VII.7.3. (c) Soit $d=3$.
Une vérification directe comme en (b) montre qu'il suffit que

$$\frac{(N+2)(N+1)}{6} \geqslant 6$$

pour que (VII.7) soit vérifié; c'est le cas pour N dans $[\![5, +\infty[\![$.
Enfin si $N=4$, alors $s(2, 4)=5$, $p(2, 4)=0$ et (VII.7) est vérifiée.

VII.7.4. (d) Soit $d=2$.
De la même manière qu'en (b) et (c) il suffit que

$$\binom{N+1}{1} \geqslant 6;$$

c'est le cas si N est dans $[\![5, +\infty[\![$. Pour $N=4$ on a $s(1,4)=3$ et $p(1,4)=1$ ce qui achève la démonstration de (VII.7).

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad d\left(\sum_{j=1}^{j=d} \varepsilon_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{j=d} j\varepsilon_j \geqslant d(2d-1). \tag{VII.8}$$

Soit $\varepsilon_{d+1} < s(d-1, N)$.
Comme

$$\sum_{j=1}^{j=d+1} j\varepsilon_j = \binom{d+N}{N},$$

il nous suffit de montrer que

$$\binom{N+d}{d} \geqslant 2d^2 - d + (d+1)(s(d-1, N) - 1);$$

or nous savons que

$$ds(d-1, N) \leqslant \binom{N+d-1}{d-1} + d - 1.$$

Il suffit donc de montrer, après réduction, que

$$d\binom{N+d-1}{d} - \binom{N+d-1}{d-1} \geqslant 2d^3 - d^2 - d - 1.$$

Ici encore, pour d fixé dans $[\![2, +\infty[\![$, la croissance de la suite définie par

$$\mu_d(N) = d\binom{N+d-1}{d} - \binom{N+d-1}{d-1} \qquad \text{sur } [\![4, +\infty[\![$$

montre qu'il suffit de prouver

$$d\binom{d+3}{d} - \binom{d+3}{d-1} \geqslant 2d^3 - d^2 - d - 1.$$

Un calcul élémentaire montre que cette dernière inégalité est vérifiée pour d dans $[\![7, +\infty[\![\cup \{2, 3\}$.

Preuve de l'inégalité (VII.8) *si d est dans* $[\![4, 6]\!]$. On a, par définition de l'entier s:

$$s(3,4) = 9,$$

$$s(4,4) = 14,$$

$$s(5,4) = 21,$$

et l'inégalité (VII.8) se vérifie directement si

$$(N=4 \text{ et } d=4)$$

ou si

$$(N=4 \text{ et } d=5)$$

ou si

$$(N=4 \text{ et } d=6).$$

Enfin la croissance, pour d fixé dans $\{4, 5, 6\}$, de la suite $\mu_d(N)$ définie sur $[\![4, +\infty[\![$ montre qu'il suffit de vérifier que

$$\forall d \in \{4, 5, 6\}, \qquad d\binom{d+4}{d} - \binom{d+4}{d-1} \geqslant 2d^3 - d^2 - d - 1,$$

ce qui est élémentaire.

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad \varepsilon_{d+1} + d^2 \leqslant \binom{d+N-1}{d}. \tag{VII.9}$$

Soit $\varepsilon_{d+1} < s(d-1, N)$.
Il suffit de vérifier que

$$s(d-1, N) - 1 + d^2 \leqslant \binom{d+N-1}{d}.$$

Or nous savons que

$$ds(d-1, N) \leqslant \binom{d+N-1}{d-1} + d - 1.$$

Il suffit donc de vérifier que

$$d\binom{N+d-1}{d} - \binom{d+N-1}{d-1} \geqslant d^3 - 1.$$

Or pour d fixé dans $[\![2, +\infty[\![$, la croissance de la suite définie par

$$\lambda_d(N) = d\binom{N+d-1}{d} - \binom{d+N-1}{d-1}$$

fait apparaître qu'il suffit de vérifier l'inégalité

$$d\binom{d+3}{d} - \binom{d+3}{d-1} \geqslant d^3 - 1,$$

qui résulte d'un calcul élémentaire.

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad d(d-1) \leqslant \binom{d-1+N}{d-1}. \tag{VII.10}$$

La suite, pour d fixé dans $[\![2, +\infty[\![$, définie par

$$\mathbf{T}_d(N) = \binom{d-1+N}{d-1}$$

étant croissante sur $[\![4, +\infty[\![$ il suffit de montrer que

$$\forall d \in [\![2, +\infty[\![, \qquad d(d-1) \leqslant \binom{d+3}{d-1},$$

et cela se vérifie élémentairement.

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad \varepsilon_{d+1} + 2t \leqslant \binom{N+d-1}{d}. \tag{VII.11}$$

Comme

$$(d+1)\, \varepsilon_{d+1} \leqslant \binom{N+d}{d},$$

il nous suffit de vérifier que

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad \binom{N+d}{d} + 2(d^2-1) \leqslant \binom{N+d-1}{d}(d+1).$$

Or pour d fixé dans $[\![2, +\infty[\![$, la croissance de la suite définie par

$$\bar{\omega}_d(N) = \binom{N+d-1}{d}(d+1) - \binom{N+d}{d}$$

sur $[\![4, +\infty[\![$, fait apparaître qu'il suffit de prouver l'inégalité

$$\forall d \in [\![2, +\infty[\![, \qquad 2(d^2-1) \leqslant \binom{d+3}{d}(d+1) - \binom{d+4}{d},$$

qui se vérifie élémentairement.

$$\left.\begin{array}{l}\forall d \in [\![2, +\infty[\![\\ \forall N \in [\![4, +\infty[\![\end{array}\right\} \qquad (d-1) + t \leqslant \binom{N+d-1}{d-1}. \tag{VII.12}$$

Il suffit de montrer que

$$2(d-1) \leqslant \binom{N+d-1}{d-1}.$$

Or, pour d fixé dans $[\![2, +\infty[\![$, la croissante de la suite définie par

$$\alpha_d(N) = \binom{N+d-1}{d-1}$$

sur $[\![4, +\infty[\![$ montre qu'il suffit de prouver l'inégalité

$$2(d-1) \leqslant \binom{d+3}{d-1}$$

qui se vérifie élémentairement.

Bibliographie

[E] Alan Eastwood, Collision de biais et interpolation, *Manuscripta Mathematica* **67** (1990), 227–249.

[H] Robin Hartshorne, "Algebraic Geometry," Springer-Verlag, New York/Heidelberg, 1977.

[HH] Robin Hartshorne et André Hirschowitz, *in* "Algebraic Geometry Proceedings La Rabida, 1981," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 961, p. 169–189.

[AH] André Hirschowitz, La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, *Manuscripta Mathematica* **50** (1985), 337–388.